Računanje konstanti u multiparametarskim quonskim algebrama

Sažetak

Neka je $\mathcal{N} = \{i_1, i_2, ..., i_N\}$ fiksirani podskup skupa nenegativnih cijelih brojeva. Promatramo slobodnu asocijativnu $\mathbb{C}$-algebru $\mathcal{B} = \mathbb{C}\langle e_{i_1}, e_{i_2}, ..., e_{i_N}\rangle$ s jedinicom sa skupom $\{e_i\}_{i\in\mathcal{N}}$ od N generatora (gdje je stupanj svakog generatora e_i jednak jedan) u kojoj je uvedena **q**-diferencijalna struktura skupom $\{\partial_i\}_{i\in\mathcal{N}}$ od N **q**-diferencijalnih operatora $\partial_i : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$, $i \in \mathcal{N}$ zadanih rekruzivno sa:

$$\partial_i(1) = 0, \quad \partial_i(e_j) = \delta_{ij},$$
$$\partial_i(e_j\, x) = \delta_{ij}\, x + q_{ij}\, e_j\, \partial_i\, x \quad \text{za svaki} \quad x \in \mathcal{B},\ i, j \in \mathcal{N}.$$

Pritom je $\delta_{ij} = 1$ za $i = j$, odnosno $\delta_{ij} = 0$ za $i \neq j$.

Općenito je finiji rastav algebre $\mathcal{B}$ po multihomogenim komponentama dan sa

$$\mathcal{B} = \bigoplus_{\substack{n\geq 0 \\ l_1\leq l_2\leq\ldots\leq l_n,\, l_j\in\mathcal{N}}} \mathcal{B}_{l_1 l_2 \ldots l_n},$$

gdje je svaki težinski potprostor $\mathcal{B}_Q = \mathcal{B}_{l_1 l_2 \ldots l_n} = span_{\mathbb{C}}\left\{e_{j_1 j_2 \ldots j_n} = e_{j_1} e_{j_2} \cdots e_{j_n} \mid j_1 j_2 \ldots j_n \in \widehat{Q} = S_n Q\right\}$, $n \geq 1$ pridružen multiskupu $Q = \{l_1 \leq l_2 \leq \ldots \leq l_n\}$, $l_j \in \mathcal{N}$.

Specijalno, ako je $l_1 < l_2 < \ldots < l_n$, $l_j \in \mathcal{N}$, onda je $Q = \{l_1, l_2, ..., l_n\}$ skup, a njemu pridruženi težinski potprostor $\mathcal{B}_Q$ zovemo generičkim. Multiskupu Q (koji nije skup) pridruženi težinski potprostor $\mathcal{B}_Q$ zovemo degeneriranim.

U algebri $\mathcal{B}$ se pod konstantom podrazumijeva netrivijalni element $C \in \mathcal{B}$, koji ima svojstvo da je $\partial_i C = 0$ za svaki $i \in \mathcal{N}$.

U disertaciji se pomoću iteriranih komutatora dobivaju eksplicitne formule za bazične konstante u bilo kojem težinskom potprostoru $\mathcal{B}_Q$ algebre $\mathcal{B}$.
Pokazuje se da u potprostorima $\mathcal{B}_Q$, $\operatorname{Card} Q = 1$ nema netrivijalnih konstanti. Također se pokazuje da konstante u bilo kojem degeneriranom potprostoru možemo konstruirati iz konstanti nekog generičkog potprostora $\mathcal{B}_Q$, što nas dovodi do zaključka da je dovoljno izračunati netrivijalne bazične konstante u generičkim potprostorima.

Proučavanjem radova Svrtan-Meljanac, Krob, Fronsdal, Corell i drugih, gdje je korišten matrični pristup, u disertaciji smo razvili formalizam zakrenute grupovne algebre te smo dobili sljedeće rezultate.

Ako pretpostavimo da vrijedi $\sigma_{l_1 l_2 \cdots l_n} = 1$, $\sigma_{j_1 j_2 \cdots j_i} \neq 1$ za svaki $2 \leq i \leq n-1$ (uvjet kocikličnosti), onda u generičkom potprostoru $\mathscr{B}_Q$, $\mathrm{Card}\, Q = n$, postoji $(n-2)!$ nezavisnih baznih konstanti, koje označavamo s $C_{l_1 l_2 j_3 j_4 \cdots j_n}$, gdje su $l_1, l_2 \in Q$ fiksirani, a $j_3 j_4 \ldots j_n \in S_{n-2} Q'$. Pritom $S_{n-2} Q'$ označava skup svih permutacija skupa $Q' = Q \setminus \{l_1, l_2\} = \{l_3, l_4, \ldots, l_n\}$.

Od posebne je važnosti opći Teorem 4.2.10, kojim se opisuju bazične konstante $C_{l_1 l_2 j_3 j_4 \cdots j_n}$ u generičkom potprostoru $\mathscr{B}_Q$, $\mathrm{Card}\, Q = n$.
Naime, njegovom primjenom nalazimo da se svaka bazična konstanta $C_{l_1 l_2 j_3 j_4 \cdots j_n}$ može prikazati pomoću iteriranih komutatora $Y_{l_1 \xi} = Y_{l_1 j_2 j_3 j_4 \cdots j_n}$ kojima je prvi indeks $l_1 \in Q$ fiksiran, a preostalih $n-1$ indeksa $j_2, j_3, j_4, \ldots, j_n \in Q'' = Q \setminus \{l_1\} = \{l_2, l_3, \ldots, l_n\}$ variraju.
U disertaciji je opći Teorem 4.2.10 ilustriran eksplicitnije za sve generičke potprostore $\mathscr{B}_Q$, $2 \leq \mathrm{Card}\, Q \leq 5$ (primjeri 4.2.11 - 4.2.14).

Iz Teorema 4.2.10 specijalno za $q_{ij} := q$ za svaki $i, j \in \mathscr{N}$ proizlaze konstante, koje je Correll opisao u svojoj disertaciji [C].