

ZADACI ZA SREDNJU ŠKOLU

1. Neka su x_1 i x_2 nultočke polinoma $P(x) = x^2 + 1999x - 2$. Dokaži da je $(x_1^n + x_2^n) \in \mathbf{Z}$, za svaki $n \in \mathbf{N}$.

2. Za kulu od karata koja ima 1 kat potrebne su 2 karte; za 2 kata potrebno je 7 karata, za 3 kata potrebno je 15 karata. Koliko je karata potrebno za kulu koja ima n katova?

3. Za funkciju f postoji $a \in R$ tako da za svaki $x \in R$ vrijedi:

$$f(x+a) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}.$$

a) Je li f periodična funkcija?

b) Je li f neprekidna funkcija?

4. Neka je \mathbf{R} skup realnih brojeva i operacija $\circ : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ definirana sa

$$x \circ y := x^y, \quad \forall x, y \in \mathbf{R}_+,$$

uz uobičajeno značenje potencije. Koji parovi elemenata komutiraju?

5. Koji brojevi iz intervala $[0, \frac{\pi}{2}]$ zadovoljavaju jednadžbu

$$\cos^8 x + \sin^8 x = \frac{97}{128} ?$$

6. Neka je pOq zadani kut s kracima p, q . Naći geometrijsko mjesto točaka u ravnini pOq sa svojstvom da je

$$\alpha d_p + \beta d_q = \text{const}, \quad (\alpha, \beta \in \mathbf{R}_+)$$

gdje je d_p udaljenost točke od polupravca p , d_q udaljenost točke od polupravca q .

7. Dokaži da za tetivni četverokut vrijedi nejednakost

$$(a + c)q + (b + d)p \leq 2R(e + f),$$

gdje su a, b, c, d stranice četverokuta, p spojnica polovišta suprotnih stranica a i c , q spojnica polovišta suprotnih stranica b i d , e i f dijagonale, a R polumjer opisane kružnice četverokutu. U kojem slučaju vrijedi jednakost?

8. Naći ostatak pri dijeljenju $10^{10} + 10^{10^2} + \dots + 10^{10^{10}}$ sa 7.

9. Neka je

$$H(\vec{a}) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

harmonijska sredina vektora $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{R}_+^n$. Ako je $\vec{a} + \vec{c} := (a_1 + c_1, a_2 + c_2, \dots, a_n + c_n)$ zbrajanje vektora u \mathbf{R}_+^n , dokažite da je

$$\frac{1}{H(\vec{a})} + \frac{1}{H(\vec{c})} \geq \frac{4}{H(\vec{a} + \vec{c})}.$$