

DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA RIJEKA  
NATJECATELJSKI ODBOR

NATJECANJE DMF-a U MATEMATICI  
23.05.2007. – 06.06.2007.  
ZADACI ZA STUDENTE

**Zadatak 1.** Neka je  $p \in \mathbb{N}$  prost. Dokažite da  $p^3$  dijeli  $\binom{2p}{p} - 2$ .

**Zadatak 2.** Neka je  $P(x, y)$  polinom stupnja  $m$  u varijabli  $x$  i stupnja  $n$  u varijabli  $y$ . Dokažite da  $P(x, e^x) = 0$  ima najviše  $m + n + mn$  rješenja u skupu realnih brojeva.

**Zadatak 3.** Neka su  $A$  i  $B$  realne kvadratne matrice reda  $n$  takve da vrijedi  $A^2 + B^2 = AB$ . Ako je  $AB - BA$  invertibilna matrica dokažite da je  $n$  djeljiv s 3.

**Zadatak 4.** Neka je  $f \in C[0, \infty)$  i

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \int_0^x f^2(t) dt = 1.$$

Dokažite da je

$$f(x) \sim \frac{1}{(3x)^{1/3}} \quad (x \rightarrow \infty).$$

**Zadatak 5.** Neka je  $X$  slučajna varijabla za koju vrijedi  $\mathbb{P}\{0 \leq X \leq M\} = 1$ . Dokažite da je

$$\mathbb{D}X \leq \frac{M^2}{4}.$$

Kada nastupa jednakost?

**Zadatak 6.** Neka su  $a, b > 0$ . Definirajmo:

$$a_1 := a, \quad b_1 := b, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n}{3}, \quad b_{n+1} = \sqrt[3]{a_n b_n^2} \quad (n \geq 1).$$

Jesu li nizovi  $(a_n)$  i  $(b_n)$  konvergentni?

**Zadatak 7.** Neka je  $B = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ ne sadrži znamenku } 3 \text{ u svom dekadskom zapisu}\}$ . Ispitajte konvergenciju reda

$$\sum_{n \in B} \frac{1}{n}.$$

**Zadatak 8.** Neka je  $A$   $3 \times 3$  matrica čiji su svi elementi jednaki 1 ili  $-1$ . Dokažite da je  $\det A$  paran broj i nađite njegovu maksimalnu vrijednost.

**Zadatak 9.** Dokažite tvrdnju: Ako je  $\mathcal{C}$  samokomplementarni i samoortogonalni binarni linearni kôd, onda je  $\mathcal{C}$  paran.

**Zadatak 10.** Neka je  $N \triangleleft G \leq S(X)$ , pri čemu je  $X$  konačan skup. Dokažite tvrdnju: Ako je  $x' \in G(x) = \{g(x) \mid g \in G\}$ , za neki  $x \in X$ , onda je  $|N(x')| = |N(x)|$ .