ZADACI DMF-A ZA NATJECANJE IZ MATEMATIKE - 2004.

1. Zadaci za srednjoškolce

Problem 1.1. Odredite broj svih dijagonalnih triangulacija konveksnog $n-$terokuta.

Problem 1.2. Neka je r cijeli broj, $r \leq 15$. Za svaki r odredite dimenzije svih kvadrata s cjelobrojnim duljinama stranica koji se mogu upisati u sferu polumjera r jedinica.

Problem 1.3. Trokut T podijeljen je na manje trokute tako da dva manja trokuta ili nemaju zajedničke točke, ili imaju zajednički vrh, ili imaju zajednički brid. Označimo vrhove trokuta T brojevima $1, 2$ i 3. Sada označimo vrhove manjih trokuta brojevima $1, 2$ i 3, tako da vrhovi koji leže na bridu trokuta T ne mogu biti označeni istim brojem kao vrh od T koji leži nasuprot tom bridu. Pritom vrhovi manjih trokuta ne moraju biti označeni različitim brojevima. Dokažite da među malim trokutima uvijek postoji barem jedan čiji su vrhovi označeni brojevima $1, 2$ i 3.

Problem 1.4. Zadan je polinom

$$P(x) = (x - a_1)^2(x - a_2)^2 \dots (x - a_n)^2 + 1,$$

gdje su $a_1, a_2, \dots, a_n$ međusobno različiti cijeli brojevi. Dokažite da se polinom $P(x)$ ne može prikazati kao produkt dva polinoma s cjelobrojnim koeficijentima, pri čemu je stupanj oba polinoma veći ili jednak 1.

Problem 1.5. U koordinatnom sustavu dužina koja spaja točke $(0, 0)$ i $(5, 3)$ prolazi kroz sedam jediničnih kvadrata. Kroz koliko jediničnih kvadrata prolazi dužina koja spaja točke $(0, 0)$ i (p, q), gdje su p i q prirodni brojevi?

Problem 1.6. Neka su a, b i c međusobno različiti cijeli brojevi. Postoji li polinom $P(x)$ s realnim koeficijentima za koji je $P(a) = b$, $P(b) = c$ i $P(c) = a$?

Problem 1.7. Zadan je neprazan skup S, njegovi podskupovi A i B i funkcija

$$f : \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(S), \qquad f(X) = (X \cap A^c) \cup B.$$

Skup slika funkcije f je skup $Im(f) = \{f(X)|\ X \in \mathcal{P}(S)\}$. Odredite skup $Im(f)$ i sve $X \in \mathcal{P}(S)$ za koje je $f(X) = X$.

Problem 1.8. Odredite sve polinome $P(x)$ za koje vrijedi

$$P(x + y) = P(x) + P(y) + 3xy(x + y), \qquad \text{za sve } x, y \in \mathbb{R}.$$

Problem 1.9. Dokažite da za sve realne brojeve a i b, $0 < a \leq b$, vrijedi

$$\ln \frac{b}{a} \leq \frac{b^2 - a^2}{2ab}.$$

Problem 1.10. Odredite sve realne brojeve a, b, p, q za koje je

$$(2x - 1)^{20} - (ax + b)^{20} = (x^2 + px + q)^{10}.$$

Problem 1.11. Utrkuju se osobe A,B,C i D, a osoba N je promatrač utrke. Nakon utrke dali su izjave:

- A: Nisam pobjednik, ali bolji sam od osobe C.
- B: Bio sam ispred osobe C.
- C: D je bio u cilju ispred B.
- D: Nisam bio zadnji.
- N: U predhodnim izjavama neistinit je iskaz pobjednika, a ostali su govorili istinu.

Nakon proglašenja pobjednika ispostavilo se da su od 5 izjava istinite najmanje 3.

(1) Dokažite da C nije među prva dva natjecatelja.
(2) Može li se vjerovati promatraču N?

2. Zadaci za studente

Problem 2.1. Neka je $P(n)$ broj svih particija skupa $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Dokažite da vrijedi:

$$e^{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P(n)}{n!} z^n.$$

Problem 2.2. Funkcija f zadana na otvorenom intervalu I je konkavna, odnosno

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y)) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y), \quad x, y \in I, \ \lambda \in [0,1].$$

Dokažite da za svaku uređenu četvorku $(x, y, t, u) \in I^4$, $x \leq y \leq t \leq u$ vrijedi

$$x^y y^t t^u u^x \leq y^x t^y u^t x^u.$$

Problem 2.3. Neka je $f \in C^2(\mathbb{R})$ i $|f^{(j)}(x)| \leq A_j \in \mathbb{R}_+$, za $j \in \{0, 1, 2\}$. Dokažite da je

$$f'(x) \leq 2\sqrt{A_0 A_2}.$$

Problem 2.4. Nađite gornju granicu za generaliziranu Mathieuovu funkciju

$$S(r, p, \alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\frac{\alpha}{2}}}{(n^\alpha + r^2)^{p+1}}, \ r, p, \alpha > 0.$$

Problem 2.5. Neka je α racionalan broj. Dokažite da je skup $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{R}$,

$$\mathbb{B} = \{\alpha n - [\alpha n] |\ n \in \mathbb{N}\},$$

gust u $(0, 1)$.

Problem 2.6. Izračunajte

$$I_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right] \right) \, dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pokažite da je

$$\lim_{n \to \infty} I_n = \gamma + 1,$$

gdje je γ Eulerova konstanta.

Problem 2.7. Neka je $X_n \sim \mathcal{B}(n; p)$, $p \in (0, 1)$, te neka je $H \subset \mathbb{N}$ s gustoćom d. Ako je H aritmetički niz, dokažite da je

$$\lim_{n \to \infty} P(X_n \in H) = d.$$

Problem 2.8. Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija, takva da za sve $h \in \mathbb{Q}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(x+h) - f(x) \to 0 \qquad x \to x_0, \ x \in \mathbb{Q}.$$

Slijedi li iz tog svojstva da je funkcija f ograničena na nekom intervalu?

Problem 2.9. Odredite sve funkcije $f \in C[0, 1]$, za koje je

$$\int_0^1 f^2(x) \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{1-x} \, f(\sqrt{x}) \, dx - \frac{1}{30}.$$

Problem 2.10. Za $n \in \mathbb{N}$ odredite $n-$ti korijen matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Problem 2.11. Za graf G sa $P_k(G)$ označavamo graf čiji su vrhovi putovi duljine k u grafu G. Dva vrha grafa $P_k(G)$ su susjedna ako je presjek pripadnih putova u G put duljine $k-1$, a njihova unija je put ili ciklus duljine $k+1$. Neka je graf G ciklus duljine n. Dokažite da su grafovi $P_k(G)$, $1 \leq k \leq n-1$, također ciklusi duljine n.