Natjecanje iz matematike Društva matematičara i fizičara 2002.
Zadaci za srednjoškolce

Problem 1. Zadana je kružnica polumjera r sa središtem u ishodištu, koja ne prolazi točkama s cjelobrojnim koordinatama, tj. ne prolazi točkama koje su u $\mathbb{Z}^2$. Neka je $d(r)$ udaljenost kružnice od $\mathbb{Z}^2$. Dokažite da za dovoljno veliki r udaljenost $d(r)$ postaje po volji malena.

Problem 2. Neka je S neprazan skup i $A, B \subseteq S$. Na partitivnom skupu $\mathcal{P}(S)$ definiramo funkciju $f : \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(S)$, tako da je $f(X) = X \cap A \cap B^c$. Odredite skup svih slika funkcije f, odnosno skup $\mathcal{R}(f) = \{f(X) \mid X \subseteq S\}$. Odredite sve $X \in \mathcal{P}(S)$ za koje je $f(X) = X$.

Problem 3. Među vrhovima pravilnog, konveksnog $(2n+1)$ - terokuta na sreću su izabrana tri različita. Izračunajte vjerojatnost da se središte mnogokuta nalazi unutar trokuta određenog s tri vrha koje čine izabrane točke.

Problem 4. Može li trokut čiji vrhovi imaju cjelobrojne koordinate biti jednakostraničan?

Problem 5. Neka je R polumjer 12 kugli koje su razmještene na trinaestoj kugli tako da dvije kugle imaju najviše jednu zajedničku točku. Nađite najmanji mogući polumjer ϱ trinaeste kugle kao funkciju od R.

Problem 6. Neka su $a, b \in \mathbb{Z}$ i neka je $f(x)$ pozitivna funkcija definirana na $[a, b]$. Koliko točaka s cjelobrojnim koordinatama sadrži područje

$$D = \{(x, y) |\ a \leq x \leq b \ \ \& \ \ 0 < y \leq f(x)\}?$$

Problem 7. Neka je $\Re e\{a\} > 0$. Točke z u kompleksnoj ravnini dijele se u tri kategorije, ovisno o tome je li modul izraza

$$A = \frac{a - z}{\overline{a} + z}$$

manji, jednak ili veći od 1. Opišite skupove sve tri kategorije.

Problem 8. Pirati su zakopali blago na otoku na sljedeći način:

Na obali su dva velika kamena međusobno udaljena 100 metara. Negdje izmeđju tih dvaju kamena, na udaljenosti od 80 metara od obale, nalazi se palma. Dva pirata su stala svaki na svoj kamen, okrenuti prema palmi. Zatim su se okrenuli za 90 stupnjeva i hodali prema unutrašnjosti otoka onoliko koliko je njihov kamen bio udaljen od palme. Kada su stali, ostali su pirati zakopali blago na polovici udaljenosti između njih dvojice.

Nakon nekoliko godina pirati su se vratili na otok s namjerom da iskopaju blago. Dva kamena su i dalje bila na na obali, međjutim palmi nije bilo ni traga. Usprkos tome, pirati su odmah pronašli mjesto na kojemu je bilo zakopano blago. Kako su znali gdje trebaju kopati da bi pronašli blago?

Problem 9. Krug polumjera R ispunjen je manjim krugovima polumjera r koji su složeni u obliku peterokuta. Koji je postotak površine velikog kruga ispunjen manjim krugovima kada polumjeri manjih krugova postaju sve manji, odnosno kada $r \to 0$?

Problem 10. Neka je $ABCD$ bilo koji tangencijalni četverokut i neka je

$$t_1 + t_2 = |AB|,\ t_2 + t_3 = |BC|,\ t_3 + t_4 = |CD|,\ t_4 + t_1 = |DA|,$$

gdje su t_1, t_2, t_3, t_4 duljine odsječaka tangenata povučenih iz vrhova četverokuta na upisanu mu kružnicu. Dokažite da vrijede nejednakosti:

$$\rho^2 > \frac{t_1 t_2 t_3}{t_1 + t_2 + t_3},\ \rho^2 > \frac{t_2 t_3 t_4}{t_2 + t_3 + t_4},\ \rho^2 > \frac{t_3 t_4 t_1}{t_3 + t_4 + t_1},\ \rho^2 > \frac{t_4 t_1 t_2}{t_4 + t_1 + t_2},$$

gdje je ρ polumjer upisane kružnice četverokuta $ABCD$.