

**Natjecanje iz matematike Društva matematičara i
fizičara 2002.
Zadaci za studente**

Problem 1. Zadana je kružnica polumjera r sa središtem u ishodištu, koja ne prolazi točkama s cjelobrojnim koordinatama, tj. koje su u \mathbb{Z}^2 . Neka je $d(r)$ udaljenost kružnice od \mathbb{Z}^2 . Dokažite da vrijedi

$$d(r) \leq \frac{\gamma}{r}, \quad r \rightarrow \infty,$$

za $\gamma \in \mathbb{R}_+$. Nadite što manju vrijednost γ u gornjoj relaciji.

Problem 2. Za graf G i prirodni broj k definiramo graf putova $P_k(G)$ kojemu su vrhovi putovi duljine k u grafu G . Dva vrha su susjedna u $P_k(G)$ ako i samo ako je presjek odgovarajućih putova put duljine $k-1$ u G , a unija tih putova je put duljine $k+1$ ili ciklus u G .

Dokažite tvrdnju: Ako je G bipartitan graf i k paran broj, onda je $P_k(G)$ također bipartitan.

Problem 3. Neka je $ABCD$ bilo koji tangencijalni četverokut i neka je

$$t_1 + t_2 = |AB|, \quad t_2 + t_3 = |BC|, \quad t_3 + t_4 = |CD|, \quad t_4 + t_1 = |DA|,$$

gdje su t_1, t_2, t_3, t_4 duljine odsječaka tangenata povučenih iz vrhova četverokuta na upisanu mu kružnicu. Dokažite da vrijede nejednakosti:

$$\rho^2 < t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1, \quad \rho^2 < t_1 t_2 + t_2 t_4 + t_4 t_1,$$

$$\rho^2 < t_1 t_3 + t_3 t_4 + t_4 t_1, \quad \rho^2 < t_2 t_3 + t_3 t_4 + t_4 t_2,$$

gdje je ρ polumjer upisane kružnice četverokuta $ABCD$.

Problem 4. Neka je f monotona funkcija na $[0, \infty)$, i neka je $\int_0^\infty f(x) dx$ konvergentan integral. Dokažite da je

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} h \sum_{n=1}^{\infty} f(nh) = \int_0^{\infty} f(x) dx.$$

Problem 5. Neka je $L(x)$ funkcija definirana za sve nenegativne vrijednosti argumenta x . Kažemo da je L *pravilno rastuća* ako je

$$(i) L(x) \uparrow 0; \quad (ii) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L(2x)}{L(x)} = 1.$$

Dokažite tvrdnju: Ako je L pravilno rastuća funkcija, tada za sve $c > 0$ vrijedi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L(cx)}{L(x)} = 1.$$

Problem 6. Faktorizirajte determinantu

$$D = \begin{vmatrix} x & \frac{l}{m} + \frac{m}{l} & \frac{l}{n} + \frac{n}{l} \\ \frac{l}{m} + \frac{m}{l} & x & \frac{m}{n} + \frac{n}{m} \\ \frac{l}{n} + \frac{n}{l} & \frac{m}{n} + \frac{n}{m} & x \end{vmatrix}, \quad mnl \neq 0.$$

Problem 7. Neka je $\beta > 0$, $\max\{\beta, 1\} < \alpha$ i neka je f^α integrabilna funkcija na $[a, b]$. Dokažite tvrdnju: Ako je $f(x) \geq (b-a)^{\frac{\beta-1}{\alpha-\beta}}$, onda je

$$\int_a^b f^\alpha(x) dx \geq \left(\int_a^b f(x) dx \right)^\beta.$$

Problem 8. Neka je $0 < p < 1$, $q = 1 - p$, te neka je $n = mp$, pri čemu je $m, n \in \mathbb{N}$. Nadalje, neka je A slučajni događaj s vjerojatnošću $P(A) = p$. Ponavljamo A nezavisno n puta. Pokažite da je

$$P\{S_n < m\} > P\{S_n > m\}.$$

Problem 9. Dokažite da je podgrupa reda 17 normalna u grupi reda 255.

Problem 10. Neka je $z = 2n \exp\{it/\sqrt{n}\}$, $t \in \mathbb{R}$. Dokažite da je tada

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2n-1}{z-1} \cdot \frac{2n-2}{z-2} \cdots \frac{2n-n}{z-n} \right| = \left(\frac{2}{e} \right)^{t^2}.$$