

## ZADACI ZA SREDNJOŠKOLCE

1. Neka je  $d$  udaljenost između središta opisane i upisane kružnice bilo kojeg trokuta. Dokažite da je

$$d^2 = R^2 - 2Rr,$$

pri čemu je  $R$  polumjer tom trokutu opisane, a  $r$  polumjer tom trokutu upisane kružnice.

2. Odredite veličinu najvećeg paketa oblika kocke koji se može omotati ukrasnim papirom dimenzije  $1m^2$ , bez rezanja ili trganja papira.

3. Riješite sustav jednažbi:

$$\cos 2y + \frac{1}{2} = (\cos y - \frac{1}{2})(1 + 2 \sin 2x),$$

$$(\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x) \sin y = 3 \operatorname{ctg} y.$$

4. Mrav se šeće bridovima kvadrata sa stranicama duljine  $1m$ . U svakom vrhu kvadrata mrav će s vjerojatnošću  $p = \frac{1}{2}$  krenuti prema jednom od susjednih vrhova. Koliko će metara mrav prosječno prijeći dok ne obiđe sve vrhove?

5. Četiri kugle dodiruju ravninu  $\pi$ . Dvije kugle imaju zadani polumjer  $r$ , a dvije nepoznati polumjer  $x$ . Odredite  $x$  ako svaka kugla dodiruje ostale tri.

6. Riješite jednažbu  $\{x^3\} = \{x\}^3$ , pri čemu je  $\{x\} = x - [x]$  decimalni dio broja  $x$ .

7. Odredite realne brojeve  $x$  za koje je  $e^x + e^{-x} = -\cosh \frac{2x^3+x^2}{x-1} + 3$ .

8. Dokažite da je  $53^{453} - 33^{333}$  djeljivo sa 10.

9. Od 100 kuglica numeriranih brojevima od 1 do 100 izgubili smo 84 kuglice. Dokažite da od preostalih 16 kuglica uvijek možemo izabrati 4 kuglice tako da suma brojeva na dvije kuglice bude jednaka sumi brojeva na preostale dvije kuglice.