

ZADACI ZA STUDENTE

1. Mrav šeće bridovima pravilnog n -terokuta sa stranicama duljine $1m$. U svakom vrhu mrav će s vjerojatnošću $p = \frac{1}{2}$ krenuti prema jednom od susjednih vrhova. Koliko će metara mrav prosječno prijeći dok ne obiđe sve vrhove?

2. Odredite najmanji $n \in \mathbb{N}$ takav da postoji grupa $P \leq S_n$ koja je izomorfna s grupom kvaterniona.

3. Neka je $F(x, y) = 0$ jednadžba ravninske krivulje sa središtem O i neka su t_A i t_B tangente na zadanu krivulju u njezinim točkama A i B . Karakterizirajte sve krivulje za koje vrijedi

$$d(t_A, O)d(A, C) = d(t_B, O)d(B, C),$$

pri čemu je C točka presjeka tangenti t_A i t_B .

4. Neka su $f, g \in C^1[0, +\infty)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = +\infty$. Odredite

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, ako taj limes postoji.

5. Niz brojeva a_0, a_1, a_2, \dots definiran je na sljedeći način:

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + z(a_n),$$

pri čemu je $z(a_n)$ zbroj znamenaka broja a_n . Pripada li broj 123456789 tom nizu i ako pripada, koji je po redu?

6. Neka je $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{\alpha + \beta a_n}$, $n \in \mathbb{N}$ gdje su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$. Ispitajte

konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

7. Riješite jednadžbu $\{x^n\} = \{x\}^n$, $n \in \mathbb{N}$, pri čemu je $\{x\} = x - [x]$ decimalni dio broja x .

8. Neka je $f(x) \in C^1[a, b]$ i $f(a) = f(b) = 0$. Dokažite da za sve $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ jednadžba $f'(x) = \alpha x^{n-1} f(x)$ ima rješenje na $\langle a, b \rangle$.

9. Od N kuglica, numeriranih brojevima od 1 do N , izgubili smo $N - n$ kuglica. Odredite minimalni prirodni broj $n = n(N)$ takav da sa sigurnošću možemo tvrditi da od preostalih n kuglica možemo izabrati 4 kuglice tako da suma brojeva na dvije kuglice bude jednaka sumi brojeva na preostale dvije kuglice.